فیزیک اختصاصی ۲

ارتعاش

مهندس علی چوپانی

قانون نیرو برای حرکت هماهنگ ساده

- حال که چگونگی تغییر شتاب یک ذره با زمان را تعیین کردیم، می توانیم با استفاده از قانون دوم نیوتن بفهمیم که چه نیرویی باید به ذره وارد شود تا این شتاب را ایجاد کند.
- $F = ma = -(m\omega^2)x$
- این معادله تعریف دیگری از حرکت هماهنگ ساده است و بیان می کند؛ حرکت هماهنگ ساده حرکت ذره ای است که به آن نیرویی متناسب با جابجایی و با علامت مخالف وارد می شود.
- این نتیجه «یعنی نیروی بازگرداننده متناسب با جابجایی ولی با علامت مخالف» همان قانون هوک برای فنر است:
- $F = -Kx$

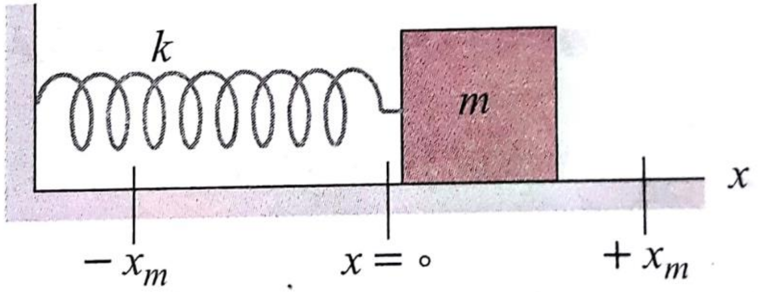
- *بنا بر این با ترکیب معادله ۲۱–۳ و ۲۲–۳ ثابت فنر باید بصورت زیر باشد:*
- $F = -Kx = -(m\omega^2)x$
- *معادله ۲۳–۳* $K = (m\omega^2)$
- با تبدیل معادله ۲۳–۳ فرکانس زاویه ای را بصورت زیر تعیین کرد:
- *معادله ۲۴–۳* $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

مثال

- قطعه ای به جرم m=۶۸۰ g به فنری با ثابت k=۶۵ N/m متصل شده است. قطعه از نقطه تعادل خود در x=۰ به x=۱۱cm کشیده شده، در t=۰ از حالت سکون رها می شود. سطح بدون اصطکاک است. الف) فرکانس زاویه ای، فرکانس و تناوب حرکت حاصل را بیابید. ب) دامنه نوسان را بیابید. ج) ماکزیمم تندی قطعه نوسان کننده چقدر است و در چه موقعی این تندی را دارد؟د) دامنه شتاب قطعه چقدر است؟ه) ثابت فاز حرکت را بیابید. و)تابع جابجایی x(t) سیستم قطعه فنر را بیابید.

تمرین

- در t=۰ جابجایی x(۰) قطعه یک نوسانگر خطی همانند شکل برابر cm ۸.۵− است. سرعت قطعه در این زمان برابر m/s ۰.۹۲− و شتاب آن برابر m/s2 ۴۷+ است. الف) فرکانس زاویه ای این سیستم را بیابید. ب) ثابت فاز و دامنه حداکثر را بیابید.



انرژی ارتعاش(E):

- انرژی جرمی که با حرکت هارمونیک ساده با دامنۀ A و فرکانس زاویه ای w_0 نوسان می کند، مجموع انرژی پتانسیل (Ep) و انرژی جنبشی آن (Ek) می باشد.

انرژی پتانسیل:

- مقدار کاری است که جرم هنگام تغییر مکان از حال تعادل، برای تغییر طول فنر انجام می دهد. نیرویی که به وسیلهٔ جرم به فنر وارد می شود +kx است و انرژی پتانسیل دستگاه به این طریق محاسبه می شود.
- $Ep = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$
- این انرژی با ژول اندازه گیری می شود.

- *Ep* را می توان با قرار دادن مقدار *x* از رابطه $x = Acos(\omega_0 \mathrm{t} + \emptyset)$ در رابطه فوق بصورت زیر نوشت:
- $Ep = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 cos^2(\omega_0 t + \emptyset)$

انرژی جنبشی:

- انرژی جنبشی دستگاه $\frac{1}{2}mV^2$ است که با استفاده از معادلهٔ سرعت به صورت زیر بدست می آید:
- $Ek = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2sin^2(\omega_0 t + \emptyset)$
- پس انرژی کلی دستگاه در تمام لحظات برابر است با:
- $E = Ep + Ek = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2(Cos^2(\omega_0 t + \emptyset) + Sin^2(\omega_0 t + \emptyset))$
- یعنی:
- $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$

- همان طور که ملاحظه می شود، چون A ثابت است، انرژی کل دستگاه ثابت می ماند، چون فرض بر این بود که دستگاه انرژی تلف نمی کند، یعنی اصطحکاک در میان نیست. فرمول $E = \frac{1}{2}kA^2$ نشان می دهد که مقدار کل انرژی برابر پتانسیل جرم است، زمانی که دارای مسافت ماکزیمم می شود یا برابر انرژی جنبشی جرم است زمانی که دارای سرعت ماکزیمم می شود ($\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2$).

ارتعاش آزاد

- در صورتی که نیروی ارتعاش محیط درونی باشد، ارتعاش را آزاد گویند هر سیستمی که دارای ارتعاش آزاد باشد، دارای یک فرکانس طبیعی مخصوص به خود است. این ارتعاش در اثر نیروی داخلی (ذاتی) سیستم بر جرم محیطی که دارای سختی (فنریت) مخصوص به خود ایجاد شده و ارتعاش محیط حول نقطهٔ تعادل آن است.

- هنگامی که جسم از حالت تعادل خود خارج شود، نیرویی ذاتی بر میرایی غلبه نموده و با فرکانس طبیعی ارتعاش پیدا خواهد کرد. در صورتی که این سیستم میرایی نداشته باشد، همچنان به ارتعاش خود ادامه خواهد داد، ولی با وجود میرایی در صورت عدم اعمال نیرو ارتعاش به تدریج میرا می گردد.

- ثابت شده است که در کلیه محیط های زنده و غیر زنده ارتعاش طبیعی از رابطه زیر پیروی می کند:
- (۱–۱۸) $$f_n(Hz) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$
- f_n : فرکانس طبیعی (Hz)
- K : ضریب سختی سیستم (N/m)
- m : جرم محیط (kg)

- از رابطه قبل می توان نتیجه گرفت که:
- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_n^2 = {}^{k}/_{m}$
- (۱–۱۹) $\mathrm{k} = \omega_n^2 \cdot m$
- لذا می توان نوشت:
- (۱–۲۰) $\mathrm{d} = \frac{mg}{k} = \frac{mg}{\omega_n^2 \cdot m} = \frac{g}{\omega_n^2}$

مثال

- یک وزنه به جرم 50kg که بر روی فنری با ضریب فنزیت $400N/m$ قرار گرفته است از حالت تعادل خارج می گردد. در صورتی که میرایی را نادیده بگیریم فرکانس ارتعاش چقدر خواهد بود؟
- $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400}{50}} = 0 \cdot 45Hz$

- رابطه فوق برای جابجایی محیط ارتعاشی بصورت زیر خواهد بود:
- (۱–۲۱) $$f_n(\mathrm{Hz}) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}$$
- **g** : شتاب ثقل $(g = 9 \cdot 81 m/s^2$
- **d** : جابجایی استاتیکی (**cm**)
- ار رابطه قبل می توان نتیجه گرفت که:
- (۱–۲۲) $$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{d}}$$
- (۱–۲۳) $$\mathrm{d} = \frac{g}{\omega_n^2}$$

مثال

- اگر یک ماشین در اثر نیروی داخلی برابر با 20N و ضریب سختی 400N/m به ارتعاش درآید، جابجایی استاتیکی و فرکانس طبیعی سیستم چقدر است؟ (در این مثال میرایی ناچیز فرض می شود)
- $d = -F/K = 0 \cdot 05m$
- $f_n = \frac{4 \cdot 98}{\sqrt{5}} = 2 \cdot 22Hz$

حرکت هماهنگ میرا

- اگر بر نوسانگر نیروی اصطحکاکی وارد نمی شد، یک نوسانگر برای همیشه در حال نوسان بود، اما واقعیت این است که در اثر اصطحکاک دامنۀ نوسان رفته رفته کاهش می یابد و به صفر می رسد در این صورت می گوییم که اصطحکاک حرکت را میرا کرده است و این حرکت را حرکت هماهنگ میرا می نامیم.
- اصطحکاک غالباً از مقاومت هوا یا از نیروهای داخلی ناشی می شود. بزرگی نیروی اصطحکاک معمولاً به سرعت بستگی دارد و در بیشتر موارد، نیروی اصطحکاک با سرعت جسم متناسب ولی در خلاف جهت آن است. damped oscillations-

- با توجه به اینکه در هر محیط که دارای ارتعاش آزاد باشد، میراکننده نیز وجود دارد لذا برای هر سیستم فرکانس طبیعی بشرح رابطه زیر خواهد بود:

- (۱–۲۵) $$f_n(Hz) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m} - (\frac{C}{2m})^2}$$

- K : ضریب سختی سیستم (N/m)
- m : جرم محیط (kg)
- C : ضریب میرایی (NS/m)

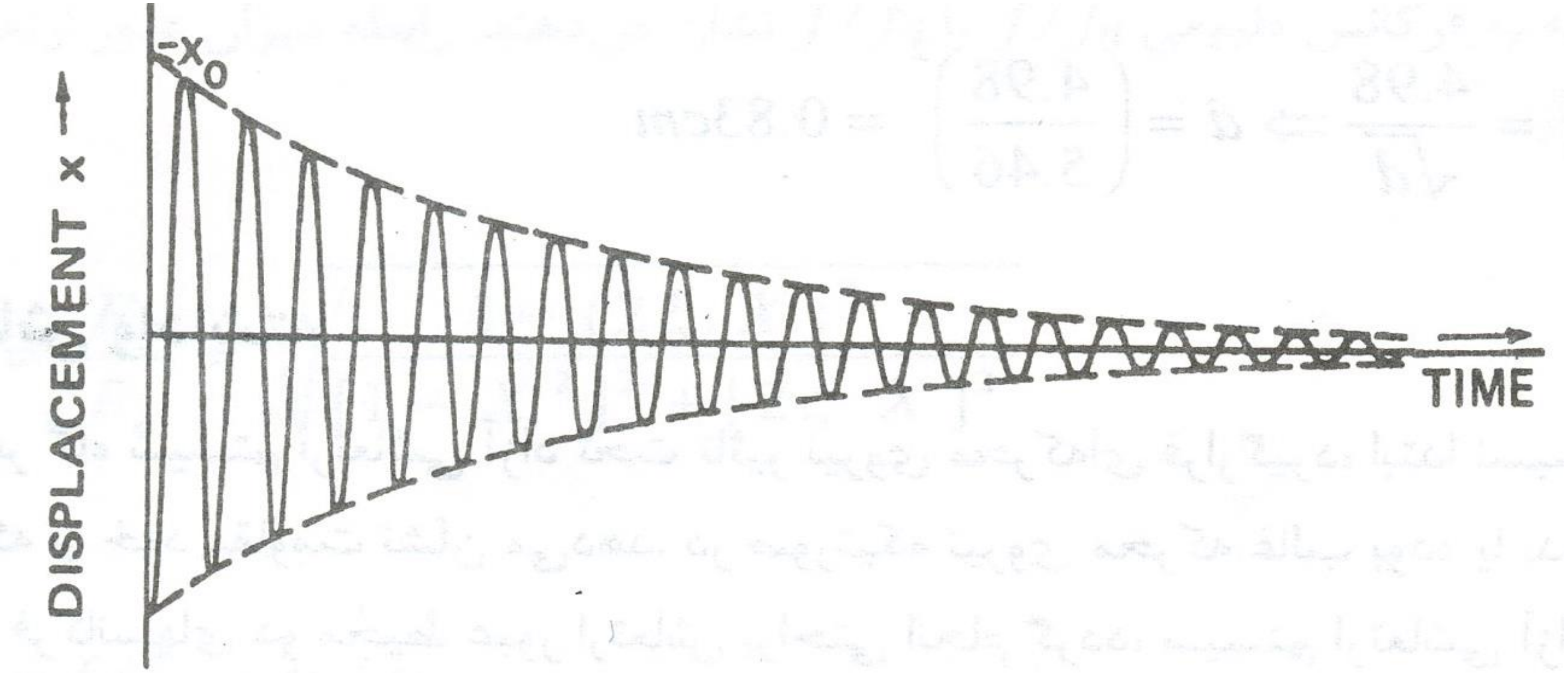
- از معکوس کردن رابطه (۱–۲۵) می توان نتیجه گرفت که:

- $C = \sqrt{4K \cdot m - ((f_n \cdot 2\pi)^2 \cdot 4m^2)}$

مثال

- اگر در فرض مثال قبل ضریب میرایی داخلی 10NS/m باشد فرکانس طبیعی چند هرتز است؟
- $\mathrm{m} = (20/9\cdot 81)2\cdot 04\mathrm{kg}$
- $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400}{2\cdot 04} - (\frac{10}{2\times 2\cdot 04})^2}$

• در یک سیستم ارتعاشی آزاد که معمولاً دارای ضریب میرایی است، در صورتی که نیروی سیستم قطع گردد، به علت وجود میراکننده دامنه موج به تدریج کاهش می یابد و در زمان معینی به کلی از حرکت می ایستد.



تمرین

- یک سیستم ارتعاشی با جرم 10kg با فنریت 12000N/m از حالت تعادل از خارج گردیده است. اگر ضریب میرایی آن 100N/s باشد، فرکانس طبیعی و جابجایی استاتیکی آن چقدر است؟

ارتعاش واداشته-Forced Vibration

- هرگاه سیستمی ارتعاشی آزاد تحت تأثیر نیروی محرکه ای قرار گیرد:

A. مقاومت

B. ارتعاش سیستم ارتعاشی آزاد با تواتر نیروی محرکه

در صورت تداوم اعمال این نیرو، ارتعاش سیستم از نوع واداشته خواهد بود.

- زمانی که فرکانس نیروی محرکه به فرکانس طبیعی سیستم نزدیک شود، دامنۀ حرکت یا جابجایی افزایش خواهد یافته و عبور ارتعاش به آسانی انجام خواهد شد.
- اگر فرکانس دو محیط با هم برابر شوند عبور ارتعاش به سیستم آزاد بدون هیچگونه مقاومتی انجام می شود که این حالت را تشدید می نامند. –Resonance
- به عبارتی پدیده تشدید، تسلیم شدن مکانیکی سیستم آزاد در برابر نیروی محرکه است.

عبور ارتعاش Transmissibility-

- سهولت عبور نیروی ارتعاش از یک سیستم به سیستم دیگر را براساس نسبت فرکانس نیروی محرکه به فرکانس طبیعی f/f_n نشان می دهند.

- (۱–۲۷) $$X = f/f_n = \omega/\omega_n$$

- f : فرکانس نیروی محرکه Hz

- f_n: فرکانس طبیعی سیستم Hz

- میزان عبور ارتعاش عبارت است از :
- (۲۶–۱) $T = \frac{F_t}{F_a}$

- T : نسبت عبور نیروی ارتعاش
- F_t : نیروی عبور کرده N
- F_a : نیروی محرکه N

- $T = \frac{F_t}{F_a} = \sqrt{\frac{1-(2\xi \cdot X)^2}{[1-X^2]^2+[2\xi \cdot X]^2}}$

- ξ : نسبت میرایی بین صفر و یک متغیر است.

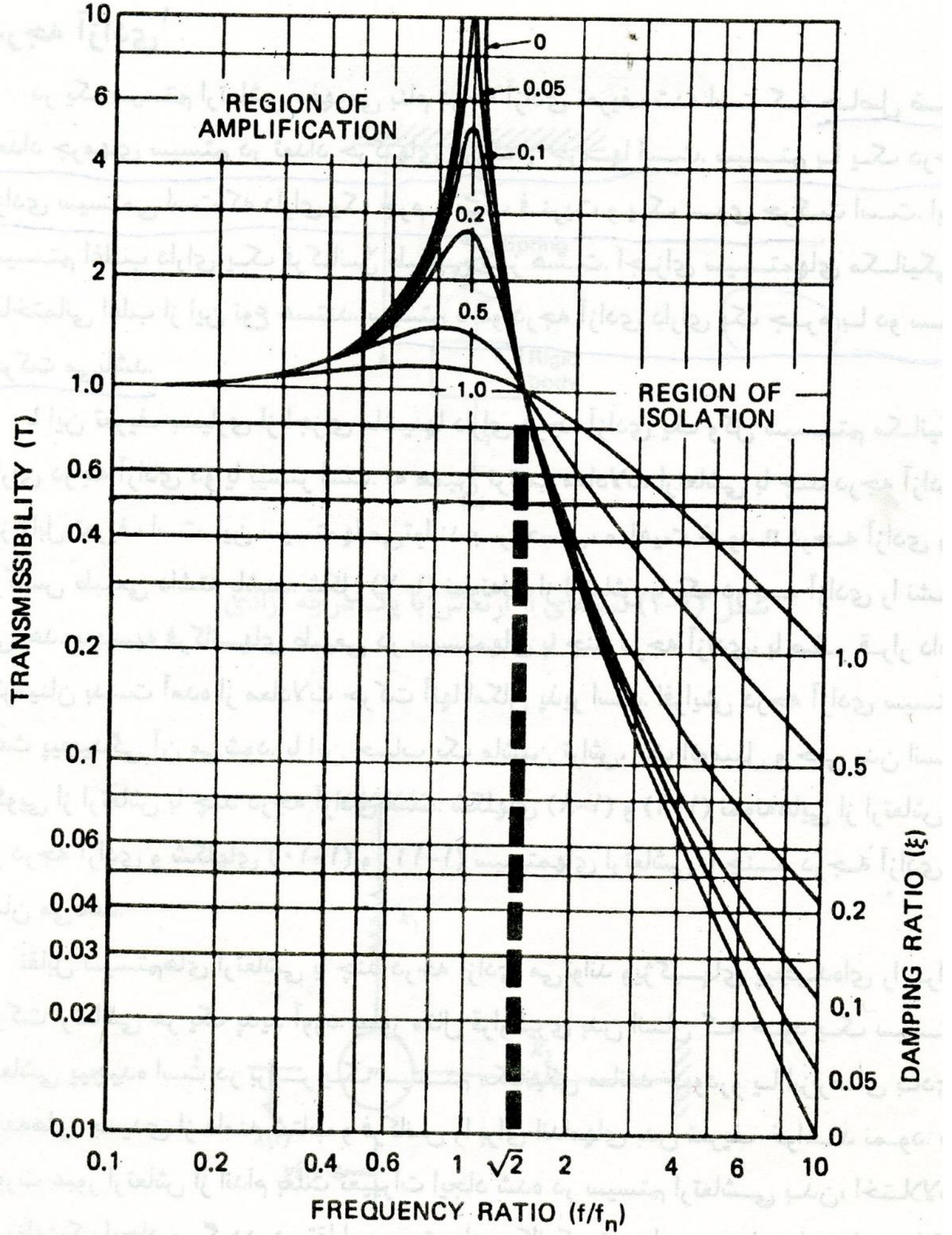
- $\xi = \frac{C}{C_c}$
- C : ضریب میرایی سیستم
- C_c : ضریب میرایی بحرانی سیستم
- ضریب میرایی بحرانی در هر سیستم ارتعاشی عبارت از ضریبی است که در آن، سیستم از ارتعاش باز می ایستد و از رابطه زیر تعیین می شود:
- $C_c = 2\sqrt{k \cdot m}$
- K : ضریب سختی سیستم (N/m)
- M : جرم محیط (kg)
- C_c : ضریب میرایی بحرانی (NS/m)

- فرکانس تشدید نیز طبق رابطه زیر قابل محاسبه است:

- $$f_r(\mathrm{Hz}) = f(\sqrt{1 - \xi^2}$$

- f_r: فرکانس تشدید

- f : فرکانس نیروی محرکه



REGION OF AMPLIFICATION
REGION OF ISOLATION
TRANSMISSIBILITY (T)
FREQUENCY RATIO (f/f_n)
DAMPING RATIO (ξ)
0
0.05
0.1
0.2
0.5
1.0
10
6
4
2
1.0
0.6
0.4
0.2
0.1
0.06
0.04
0.03
0.02
0.01
0.1
0.2
0.4
0.6
1
√2
2
4
6
10
1.0
0.5
0.2
0.1
0.05
0

- براساس نسبت عبور می توان نسبت ایزولاسیون ارتعاش یا مقاومت در مقابل عبور را که عکس آن است نیز مشخص نمود. این نسبت معمولاً به صورت درصد ایزولاسیون نشان داده می شود:

- $Is(\%) = (1 - T) \times 100$